Sur quelques conséquences d'une proposition de M. Lusin.

Par WACŁAW SIERPIŃSKI à Warszawa.

Il est remarquable que parmi les diverses conséquences qu'on a tiré de l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) un grand nombre peut être déduit d'une seule conséquence de cette hypothèse (sans faire appel à elle même), notamment de la proposition **L** suivante due à M. N. LUSIN[1]):

L. *Il existe un ensemble linéaire L de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable non dense.*

Le but de cette Note est de déduire de la proposition **L** les deux conséquences suivantes:

P. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle* $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *qui ne prennent que deux valeurs* 0 *et* 1 *et qui sont telles que quelle que soit la suite infinie croissante d'indices* $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, *la suite infinie* $\{f_{m_i}(x)\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *n'est convergente que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de* x.[2])

Q. *Il existe une suite infinie d'ensembles linéaires* $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *telle que toute transformation biunivoque de la droite*

---

[1]) N. LUSIN, Sur un problème de M. Baire, *Comptes rendus Académie Paris*, 158 (1914), p. 1258—1261, esp. p. 1259. Dans mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Mat., t. IV, Warszawa-Lwów, 1934) j'ai consacré tout un chapitre aux conséquences de la proposition L (p. 36—75).

[2]) Cette proposition a été déduite par moi de l'hypothèse du continu (comme solution d'un problème de M. S. SAKS) dans: W. SIERPIŃSKI, Remarque sur les suites infinies de fonctions, *Fundamenta Math.*, 18 (1932), p. 110—113; *cf.* ma Note: Sur un problème de M. Ruziewicz concernant l'hypothèse du continu, *Bulletin Académie Serbe*, (A) 1 (1933), p. 67—73, esp. p. 73 et mon livre cité, p. 104 (proposition C_{60}) et p. 62 (proposition C_{13}).

en elle-même transforme tous les ensembles de cette suite, sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux, en ensembles non mesurables L et dépourvus de la propriété de Baire au sens large (c. à. d. relativement à la droite).[3])

A ce but nous déduirons d'abord de la proposition **L** la conséquence **C** suivante qui, par elle-même, présente quelque intérêt:

C. *Il existe une suite infinie d'ensembles linéaires* $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$, *telle que, N étant un ensemble linéaire indénombrable quelconque, il existe un nombre naturel p, tel que l'on a*

$$NE_n \neq 0 \quad et \quad N-E_n \neq 0 \quad pour \quad n \geqq p.$$

Démonstration. Soit L un ensemble linéaire satisfaisant à la proposition **L.** On a donc $\overline{\overline{L}}=2^{\aleph_0}$ et il existe une transformation biunivoque $f(x)$ de l'ensemble L en l'ensemble $X=f(L)$ de tous les nombres réels. Soit $g(x)$ la fonction inverse de $f(x)$ (qui transforme X en $L=g(X)$).

Désignons, pour $n=1,2,\ldots$, par H_n l'ensemble de tous les nombres de L dont le développement en fraction dyadique essentiellement infinie a comme n-ème chiffre le nombre 1 et posons $E_n=f(H_n)$. Je dis que la suite d'ensembles $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ satisfait à la proposition **C.**

Soit, en effet, N un ensemble linéaire indénombrable et admettons que la condition de **C** est en défaut pour l'ensemble N. Dans ce cas il existe ou bien une infinité d'indices n, pour lesquels on a $NE_n=0$, donc aussi $g(NE_n)=0$, ou bien une infinité d'indices n, pour lesquels on a $N-E_n=0$, donc aussi $g(N-E_n)=0$.

Posons $g(N)=N_1$: ce sera un sous-ensemble indénombrable de L. La fonction g étant à valeurs distinctes et inverse de la fonction f, on a

$$g(NE_n)=g(N)\,g(E_n)=N_1 H_n$$

et

$$g(N-E_n)=g(N)-g(E_n)=N_1-H_n$$

pour $n=1,2,\ldots$ Il existe donc une infinité d'indices n pour lesquels on a soit $N_1H_n=0$, soit $N_1-H_n=0$, c. à. d. $N_1 \subset H_n$.

---

[3]) La première partie de cette proposition (concernant la non-mesurabilité L) a été démontrée par une voie différente par M. E. Szpilrajn, Sur l'équivalence des suites d'ensembles et l'équivalence des fonctions, *Fundamenta Math.*, **26** (1936), p. 302–326, esp. p. 321 (théorème (iii)).

Si $N_1 H_n = 0$ pour $n = n_1, n_2, \ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots$, alors on a (vu que $N_1 \subset L$):

$$(1) \qquad N_1 \subset L \prod_{k=1}^{\infty} C H_{n_k}.$$

Or, il résulte tout de suite de la définition des ensembles H_n et de $n_1 < n_2 < \ldots$ que l'ensemble $T = \prod_{k=1}^{\infty} C H_{n_k}$ est non dense. L'ensemble L satisfaisant à la proposition **L**, l'ensemble LT est donc au plus dénombrable, ce qui est impossible, d'après (1) (N_1 étant indénombrable).

Si $N_1 \subset H_n$ pour $n = n_1, n_2, \ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots$, on trouve

$$N_1 \subset \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k}$$

et, l'ensemble à droite étant un sous-ensemble non dense de L, on aboutit encore à une contradiction.

Il est ainsi démontré que $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{C}$.

Désignons maintenant par $\mathbf{C}^*$ la proposition qu'on obtient de la proposition **C** lorsqu'on y remplace le mot *„indénombrable"* par *„de puissance du continu"*. On a évidemment $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$ (et, si l'hypothèse du continu est vraie, les propositions **C** et $\mathbf{C}^*$ coïncident).

Je démontrerai maintenant que *les ensembles E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ qui satisfont à la proposition* $\mathbf{C}^*$ (donc, à plus forte raison, aussi ceux qui satisfont à la proposition **C**) *sont tous, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, non mesurables L et dépourvus de la propriété de Baire au sens large*[4]).

Cela est une conséquence immédiate du théorème suivant, intéressant peut-être par lui-même:

Théorème. *Si $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est une suite infinie d'ensembles linéaires mesurables (resp. jouissant de la propriété de Baire au sens large), il existe un ensemble linéaire parfait P, tel qu'on a pour une infinité d'indices n ou bien $P \subset E_n$, ou bien $P \subset CE_n$.*

Pour démontrer notre théorème, nous prouverons d'abord ce

Lemme. *Soit Q un ensemble linéaire contenant un sous-ensemble parfait et soit $Q = M_n + N_n$ et $M_n N_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$,*

---

[4]) On peut déduire cela aussi d'un théorème de M. Mazurkiewicz, Sur les suites de fonctions continues, *Fundamenta Math.*, **18** (1932), p. 114—117.

où les ensembles M_n *et* N_n $(n=1, 2, \ldots)$ *jouissent de la propriété* α *suivante: si, pour un ensemble linéaire parfait P, on a* $\overline{\overline{PM_n}} > \aleph_0$ *(resp.* $\overline{\overline{PN_n}} > \aleph_0$*), il existe un ensemble parfait* $\subset PM_n$ *(resp.* $\subset PN_n$*).*[5] *Alors il existe un ensemble parfait R, tel qu'on a pour une infinité d'indices n ou bien* $R \subset M_n$*, ou bien* $R \subset N_n$.

Démonstration. Distinguons deux cas:

1) Quel que soit l'ensemble parfait $P \subset Q$, il existe un indice p, tel que $\overline{\overline{PM_n}} > \aleph_0$ pour $n \geqq p$.

2) Le cas 1) n'a pas lieu.

Dans le cas 1) soit P un ensemble parfait $\subset Q$ et soient P_0 et P_1 deux sous-ensembles disjoints parfaits et bornés de P, de diamètres $< 1/2$. D'après 1) il existe des nombres naturels p_0 et p_1, tels que $\overline{\overline{P_0 M_n}} > \aleph_0$ pour $n \geqq p_0$ et $\overline{\overline{P_1 M_n}} > \aleph_0$ pour $n \geqq p_1$. Soit $n_1 = \max(p_0, p_1)$: nous aurons $\overline{\overline{P_0 M_{n_1}}} > \aleph_0$ et $\overline{\overline{P_1 M_{n_1}}} > \aleph_0$ et d'après la condition α de notre lemme il existe des ensembles parfaits P_0^* et P_1^*, tels que $P_0^* \subset P_0 M_{n_1}$ et $P_1^* \subset P_1 M_{n_1}$. Soient P_{00} et P_{01} deux sous-ensembles parfaits disjoints de P_0^* et soient P_{10} et P_{11} deux sous-ensembles parfaits disjoints de P_1^*, tous les quatres de diamètres $< 1/2^2$. Comme plus haut, nous trouverons un indice $n_2 > n_1$, tel que $\overline{\overline{P_{00} M_{n_2}}} > \aleph_0$, $\overline{\overline{P_{01} M_{n_2}}} > \aleph_0$, $\overline{\overline{P_{10} M_{n_2}}} > \aleph_0$ et $\overline{\overline{P_{11} M_{n_2}}} > \aleph_0$.

En raisonnant ainsi de suite, nous obtiendrons un système $\{P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}\}$ d'ensembles parfaits et bornés et une suite infinie croissante d'indices $n_1 < n_2 < \ldots$, tels que, pour k naturel fixe, les ensembles

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k = 0, 1)$$

sont disjoints, de diamètres $< 1/2^k$ et que

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} \subset M_{n_k} P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}}.$$

Soit, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$,

$$S_k = \sum P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de k indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

[5]) La propriété α a été considérée par M. N. Lusin, Sur les ensembles analytiques, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), p. 1–95, esp. p. 42 et par M^elle^ S. Braun, Sur une propriété d'ensembles, *Fundamenta Math.*, **28** (1937), p. 211–213, qui a déduit de l'hypothèse du continu l'existence de deux ensembles linéaires à propriété α dont la partie commune n'en jouit pas.

égaux à 0 ou à 1 (donc, la somme S_k contenant 2^k termes). Posons

$$R = S_1 S_2 S_3 \ldots$$

On voit sans peine que l'ensemble R est parfait et que

$$R \subset M_{n_1} M_{n_2} M_{n_3} \ldots$$

Dans le cas 2) il existe un ensemble parfait $P \subset Q$, tel qu'on a $\overline{\overline{PM_n}} \leqq \aleph_0$ pour une infinité d'indices n, soit pour $n = n_1, n_2, \ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots$

Posons

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} PM_{n_k}; \tag{2}$$

nous aurons $\overline{\overline{D}} \leqq \aleph_0$ et il existe un ensemble parfait $R \subset P - D$. Vu que $R \subset P \subset Q = M_{n_k} + N_{n_k}$ et que $M_{n_k} N_{n_k} = 0$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, on aura, d'après (2):

$$R \subset N_{n_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) une suite infinie d'ensembles linéaires mesurables L (resp. jouissant de la propriété de Baire au sens large). Nous pouvons donc poser $E_n = E_n^* + R_n$ et $CE_n = H_n^* + T_n$, où E_n^* et H_n^* sont des ensembles F_σ (resp. G_δ) et les ensembles R_n et T_n sont de mesure nulle (resp. de la 1^{re} catégorie) pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Soient R_n^* et T_n^* des ensembles G_δ de mesure nulle (resp. des F_σ de la 1^{re} catégorie) contenant R_n et T_n respectivement.

Posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} (R_n^* + T_n^*)$: ce sera un ensemble $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle (resp. de la 1^{re} catégorie), et l'ensemble $Q = CS$ sera un $F_{\sigma\delta}$ contenant un sous-ensemble parfait.

Vu que $R_n \subset S$ et $T_n \subset S$ pour $n = 1, 2, \ldots$, nous aurons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$Q = (E_n + CE_n) - S = (E_n^* - S) + (H_n^* - S) = M_n + N_n,$$

où $M_n = E_n^* - S$ et $N_n = H_n^* - S$ sont des $F_{\sigma\delta}$ et $M_n \subset E_n$, $N_n \subset CE_n$, donc $M_n N_n = 0$, pour $n = 1, 2, \ldots$

Or, les ensembles M_n et N_n ($n = 1, 2, \ldots$), en tant que mesurables B, jouissent de la propriété α (puisque, comme on sait, tout ensemble mesurable B indénombrable possède un sous-ensemble parfait). On peut donc appliquer notre lemme aux suites d'ensembles $\{M_n\}$ et $\{N_n\}$, dont il résulte qu'il existe un ensemble parfait P tel qu'on a pour une infinité d'indices n soit $P \subset M_n$, soit $P \subset N_n$, donc, à plus forte raison, soit $P \subset E_n$, soit $P \subset CE_n$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Je démontrerai maintenant (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les propositions* **P** *et* **C** *sont équivalentes*[6]).

1. **C**$\rightarrow$**P.** Soit, en effet, $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant à la proposition **C**, et soit $f_n(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n (c. à. d. $f_n(x)=1$ pour $x \in E_n$ et $f_n(x)=0$ pour $x \in CE_n$). On voit sans peine que la suite infinie de fonctions $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ satisfait à la proposition **P.** On a ainsi **C**$\rightarrow$**P.**

2. **P**$\rightarrow$**C.** Soit $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie de fonctions satisfaisant à la proposition **P.** On voit sans peine qu'en posant $E_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_n(x)=1]$ on obtient une suite infinie d'ensembles $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ satisfaisant à la proposition **C.** On a ainsi **P**$\rightarrow$**C.**

L'équivalence **P**$\rightleftarrows$**C** est ainsi démontrée. Il en résulte que **L**$\rightarrow$**P** (puisque **L**$\rightarrow$**C**$\rightarrow$**P**).

Quant à la proposition **P** il est encore à remarquer que si l'on y remplace (à la fin de la proposition) les mots *„au plus dénombrable“* par *„non dense et de mesure nulle“*, on peut démontrer la proposition ainsi modifiée sans faire appel à l'hypothèse du continu, et même construire effectivement la suite correspondante $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, notamment en définissant (pour $n=1, 2, \ldots$) la fonction $f_n(x)$ (pour x réels) par la formule

$$f_n(x) = \mathrm{E}\,2^n x - 2\,\mathrm{E}\,2^{n-1} x,$$

où $\mathrm{E}\,t$ désigne l'entier le plus grand ne dépassant pas t.

Je vais maintenant démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *les propositions* **Q** *et* **C*** *sont équivalentes.*

1. **C***$\rightarrow$**Q.** Soit, en effet, $\{E_n\}$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant à la proposition **C*** et soit $f(x)$ une transformation biunivoque quelconque de la droite en elle-même. On voit sans peine que les ensembles $E_n^* = f(E_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ satisfont encore à la proposition **C***, donc, comme j'ai démontré plus haut, ils sont tous, sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux, non mesurables L et dépourvus de la propriété de Baire au sens large. Ils satisfont donc à la proposition **Q.** On a ainsi **C***$\rightarrow$**Q.**

[6]) *Cf.* mon livre cité, p. 105.

2. $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}^*$. Soit $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant à la proposition **Q**: je dis que cette suite satisfait également à la proposition $\mathbf{C}^*$. Supposons, en effet, que ce n'est pas le cas. Il existe donc un ensemble linéaire N de puissance du continu et une suite infinie croissante d'indices $n_1 < n_2 < \ldots$, telle qu'on a soit $NE_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, soit $N-E_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$. N étant un ensemble linéaire de puissance du continu, il existe, comme on voit sans peine, une transformation biunivoque $f(x)$ de la droite en elle-même qui transforme le complémentaire CN de N en un ensemble $f(CN)$ de mesure nulle. Si l'on a $NE_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, il en résulte que $E_{n_k} \subset CN$, donc $f(E_{n_k}) \subset f(CN)$ et, comme $\text{mes} f(CN)=0$, on trouve $\text{mes} f(E_{n_k})=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, contrairement à la condition de **Q.** Si l'on a $N-E_{n_k}=0$ pour $k=1, 2, \ldots$, on a $CE_{n_k} \subset CN$ et $f(CE_{n_k}) \subset f(CN)$, donc $\text{mes}\, f(CE_{n_k})=0$ pour $k=1, 2, \ldots$ et les ensembles $f(CE_{n_k})$ $(k=1, 2, \ldots)$ sont tous mesurables L, encore contrairement à la condition de **Q.** On a ainsi $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}^*$.

L'équivalence $\mathbf{Q} \rightleftarrows \mathbf{C}^*$ est ainsi démontrée. Il en résulte que $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{Q}$ (puisque $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{Q}$).

Plus haut nous avons démontré que $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$: comme $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{Q}$, il en résulte que $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$. Il est ainsi démontré (sans faire appel à l'hypothèse du continu) que *la proposition* **P** *entraîne la proposition* **Q.**

Quant à la proposition **Q,** il est à remarquer que M. E. Szpilrajn a démontré sans faire appel à l'hypothèse du continu la proposition plus faible suivante[7]:

Il existe une suite infinie d'ensembles linéaires $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$, telle que toute transformation biunivoque de la droite en elle-même transforme au moins un ensemble de cette suite en un ensemble non mesurable L.

J'ai déduit de l'hypothèse du continu la proposition **S** suivante[8]) qui peut être régardée comme duale par rapport à la proposition **L**[9])

---

[7]) l. c. [3]), p. 321 (théorème (ii)). L'énoncé de M. Szpilrajn est un peu différent.

[8]) W. Sierpiński, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$), *Fundamenta Math.*, 5 (1924), p. 177—187, esp. p. 184; aussi mon livre cité, p. 80 (proposition C_{26}).

[9]) Voir mon livre cité, p. 76. Or, M. F. Rothberger, Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und

S. *Il existe un ensemble linéaire S de puissance du continu ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle.*

Il est à remarquer qu'on peut démontrer (sans faire appel à l'hypothèse du continu) qu'on a $\mathbf{S} \to \mathbf{C}$, donc aussi $\mathbf{S} \to \mathbf{P}$ et $\mathbf{S} \to \mathbf{Q}$. La démonstration est basée sur le suivant

Lemme. *Soit, pour $n = 1, 2, \ldots$, H_n l'ensemble de tous les nombres réels dont le développement dyadique essentiellement infini a comme n-ième chiffre le nombre 1. Quelle que soit la suite infinie croissante de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$, on a*

$$\text{(3)} \qquad \text{mes} \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k} = 0 \quad \text{et} \quad \text{mes} \prod_{k=1}^{\infty} CH_{n_k} = 0.$$

Démonstration. Il est à remarquer d'abord qu'on obtient l'ensemble H_n (resp. CH_n) ($n = 1, 2, \ldots$) en divisant chaque intervalle $(p, p+1)$ (où p est un entier) en 2^n intervalles égaux et en prenant la somme de tous les intervalles de rang pair (resp. impair) numérotés d'après la grandeur de leurs extrémités droites et dépourvus de leurs extrémités gauches. Il en résulte sans peine par l'induction que, I_p désignant l'intervalle $(p, p+1)$ (où p est un entier), on a, pour $s = 1, 2, \ldots$:

$$\text{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{s} H_{n_k}\right) = \frac{1}{2^s} \quad \text{et} \quad \text{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{s} CH_{n_k}\right) = \frac{1}{2^s},$$

ce qui donne (pour p entier)

$$\text{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \text{mes}\left(I_p \prod_{k=1}^{\infty} CH_{n_k}\right) = 0,$$

d'où résultent tout de suite les formules (3). Notre lemme est ainsi démontré.

En partant de ce lemme on démontre l'implication $\mathbf{S} \to \mathbf{C}$ d'une façon tout à fait analogue comme plus haut l'implication $\mathbf{L} \to \mathbf{C}$ (il faut seulement remplacer dans le raisonnement les ensembles non denses par les ensembles de mesure nulle).

Il est ainsi établi (sans faire appel à l'hypothèse du continu) qu'on a $\mathbf{S} \to \mathbf{C} \to \mathbf{P} \to \mathbf{C}^* \to \mathbf{Q}$.

(Reçu le 12 octobre 1938)

Sierpińskischen Mengen, *Fundamenta Math*, **30** (1938), p. 215—217, a démontré que l'ensemble des propositions **L** et **S** équivaut à l'hypothèse du continu.